CONCEPÇÕES DE FORMANDOS DO ENSINO MÉDIO SOBRE A DENSIDADE DOS NÚMEROS REAIS

Gerson Geraldo Chaves, Vera Helena Giusti de Souza
Universidade Federal de Viçosa – *campus* Florestal. (Brasil).
Universidade de São Paulo - Instituto de Matemática e Estatística. (Brasil)
ggchaves011166@gmail.com, verahgsouza@gmail.com

RESUMO: Apresenta-se um recorte de uma pesquisa de Doutorado em Educação Matemática, com a qual procurou-se investigar que elementos, presentes na *imagem de conceito* relativa à densidade dos números reais, são manifestados por 23 estudantes brasileiros, formandos do Ensino Médio (16-18 anos de idade), na resolução de quatro questões, duas com foco no aspecto numérico da densidade do conjunto dos números reais e as outras duas, no geométrico. Trata-se de uma pesquisa qualitativa e, para a análise dos dados, teve-se como referencial as ideias de *imagem de conceito* e de *definição de conceito* dadas por Tall e Vinner (1981) e o construto *já*-encontrado, presente na teoria dos *Três Mundos da Matemática*, defendida por Tall (2013). A análise das respostas aponta que o conceito de densidade dos números reais não está presente na *imagem de conceito* dos estudantes participantes e que, em particular, a ideia de sucessor, como definida para os números inteiros, constitui um *já-encontrado* dificultador para a compreensão da densidade dos números reais.

Palavras-chave: números reais, densidade, ensino médio

ABSTRACT: This paper presents a review of a PhD research in Mathematics Education, which seeks to investigate which elements, present in the image of the concept about the density of real numbers, are expressed by 23, high school graduates (16to18 age group) Brazilian students in the solution of four question; two focusing on the numerical aspect of the density of a set of real numbers and the other two on geometric aspects. It is a qualitative research and, for the analysis of the data, we had as a reference point, the ideas of image and definition of concept given by Tall and Vinner (1981) and the already-known construct, present in the theory of Three Worlds of Mathematics, defended by Tall (2013). The analysis of the answers points out that the concept of density of real numbers is not present in the image of the concept of the students who were involved, and that, in particular, the idea of successor, as defined for the integers, constitutes an already found constraint for the understanding of the density of real numbers.

Key words: real numbers, density, high school, onto semiotic approach.

Introdução

A noção de número real está presente na maioria dos conteúdos de Matemática e, apesar de ser importante para a compreensão de outros assuntos, em diversas áreas, muitas dificuldades são manifestadas e equívocos são cometidos quando se refere aos números reais e noções subjacentes, mesmo por indivíduos que tiveram contato com o tema por vários anos, conforme destacam pesquisas realizadas em diversos países, como as de Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) em Israel; Robinet (1986) na França e Soares, Ferreira e Moreira (1999) no Brasil. Tais pesquisas apontam que a questão dos números reais, suas representações e noções subjacentes se mostram confusas e pouco compreendidas por estudantes de todos os níveis, inclusive por futuros professores de Matemática.

Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) levantaram a hipótese de que a aprendizagem dos números irracionais enfrenta dois obstáculos intuitivos: as noções de incomensurabilidade e de densidade (o fato dos números racionais constituírem um conjunto denso no conjunto dos reais, mas que não preenche toda a reta). A fim de avaliar a presença e os efeitos desses obstáculos, esses pesquisadores investigaram o conhecimento que alunos do ensino secundário e futuros professores de Matemática, da região de Tel Aviv, detêm sobre tais números. Os resultados obtidos revelam que a maioria dos alunos secundários e muitos futuros professores não são capazes de definir números racionais, irracionais e/ou reais; classificar corretamente números pertencentes a conjuntos numéricos distintos; identificar características que diferenciam $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}^C$. Também ficaram evidentes ideias confusas sobre os conceitos de números racionais e irracionais e de relações entre eles.

No que se refere à densidade, foram propostas algumas questões para observar a reação dos participantes da pesquisa frente à relação existente entre os racionais, irracionais, reais e a reta numérica, sendo que os estudantes não se surpreenderam frente ao fato de que em um intervalo existe uma infinidade de números racionais e irracionais, contrariando a suposição inicial de que isso ocorreria. Com isso, concluíram que dificuldades que poderiam gerar os dois obstáculos intuitivos não são de ordem intuitiva, primitiva, rudimentar. Pelo contrário, seria um indicativo de um nível relativamente alto de conhecimento matemático. Uma sugestão dos autores é que a ausência de significado intuitivo na ideia de coexistirem, em um mesmo intervalo, dois conjuntos infinitos de números distintos, ambos densos na reta numérica, com características e propriedades particulares, é dificuldade que deve ser enfrentada e não evitada na Educação Matemática.

Compactuados com a sugestão dada por esses pesquisadores, acrescentamos, em concordância com Silva e Penteado (2009), a defesa e a importância da introdução de conceitos relacionados à densidade dos números reais na Educação Básica brasileira, especialmente no Ensino Médio, pois entendemos que é um assunto importante a ser trabalhado, uma vez que é um conceito necessário para a compreensão de outros tópicos da Matemática, tais como intervalos reais e funções nesse nível de ensino e limite e continuidade de funções em estudos mais avançados.

Além das dificuldades apontadas em pesquisas, na compreensão da densidade, no desempenho de nossas funções docentes muitas vezes nos deparamos com a não compreensão ou, talvez, com o não conhecimento da noção de densidade dos números reais. A não compreensão e/ou não conhecimento dessa propriedade pode ser observada quando, por exemplo, o aluno é solicitado a indicar um número real que seja o mais próximo de 1 e à sua direita e o estudante indica 1,1, parecendo transferir propriedades válidas para os números inteiros aos reais. Outro equivoco pode ser observado quando indagamos sobre a quantidade de elementos existentes no intervalo real $\{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 4\}$ e o estudante indica que existem apenas dois, os números 2 e 3.

Preocupados com a situação que se mostra, resolvemos buscar uma melhor compreensão das ideias manifestadas por estudantes secundários sobre a densidade dos reais e, assim, estabelecemos como objetivo de pesquisa identificar que elementos da *imagem de conceito* são evocados na resolução de quatro questões, duas delas com foco no aspecto numérico da densidade do conjunto dos números reais e as outras, no geométrico. Também procuramos identificar *já-encontrados* que possam ter influenciado as respostas dadas pelos participantes.

As lentes que serão utilizadas para trazer à tona respostas às indagações que pusemos para o nosso estudo serão fornecidas pelas ideias de *imagem de conceito* e de *definição de conceito* (Tall e Vinner, 1981) e o construto *já-encontrado,* presente na teoria dos *Três Mundos da Matemática* (Tall, 2013).

■ Considerações teóricas

Segundo Tall e Vinner (1981), podemos dizer que a *imagem de conceito* se refere à estrutura cognitiva individual total associada a determinado conceito, que pode ter aspectos incluídos, excluídos ou modificados, conforme o indivíduo amadurece. Não é uma estrutura estática, pode ser enriquecida à medida que o indivíduo encontra novos estímulos, no decorrer da vida.

A *imagem de conceito* pode ser composta por atributos de diferentes naturezas e ter representações verbais e não verbais de todos os tipos, que cada um associa a determinado conceito, que podem ser coerentes ou não com o que é aceito pela comunidade matemática. A *imagem de conceito evocada*, ou seja, aquela que se manifesta quando se questiona sobre a densidade dos conjuntos numéricos, pode incluir elementos e justificativas tais como: inclusão de outros conjuntos (um conjunto é denso porque contém outros conjuntos numéricos como os inteiros e decimais, por exemplo) ou a impossibilidade de indicar um número próximo a outro número (em um conjunto denso não se pode indicar um número – antes ou depois – que seja mais próximo desse que todos outros). Esses atributos podem, ou não, estar na *imagem de conceito* de um indivíduo e se associar ao conceito de densidade.

A *Definição de Conceito* está relacionada ao conjunto de palavras utilizadas pelo indivíduo para definir determinado conceito, sendo também individual e, como a *imagem de conceito,* pode mudar ao longo do tempo. Pode ser uma simples memorização, expressar a compreensão matemática do conceito em questão ou ser uma reconstrução pessoal da definição formal. Por exemplo, para Caraça (1951, p. 51), a *definição de conceito* de densidade de um conjunto é que “entre dois dos seus elementos *quaisquer* exista uma infinidade de elementos do mesmo conjunto”.

O entendimento de certa situação matemática varia de indivíduo para indivíduo, porque é baseado em experiências anteriores, seja da vida escolar ou do cotidiano, que o ajudaram a desenvolver a própria *imagem de conceito*. Essas experiências são de fundamental importância, pois afetam a aprendizagem de um conceito matemático e quando um indivíduo se depara com uma situação que lhe parece familiar, pode utilizar um procedimento ou conceito que já conhece e que pode ser solidário ou problemático para a aprendizagem do novo conceito. Dessa forma, um *já-encontrado* “é toda e qualquer experiência anterior a um certo aprendizado, considerada como construto mental, presente na imagem de conceito do aluno, que possa interferir no aprendizado em questão, seja de forma positiva ou negativa” (Lima, 2007, p.88).

Entendemos que alguns *já-encontrados* podem ser dificultadores para a compreensão dos números reais e do conceito de densidade, dos quais destacamos a generalização inadequada do conceito de sucessor, válida para o conjunto dos números inteiros, estendida aos reais. Por outro lado, a compreensão de características da reta, como ser ilimitada e formada por infinitos pontos adimensionais, pode ser um *já-encontrado* que atue de forma colaboradora quando se quer a compreensão da correspondência que existe entre os números reais e os pontos da reta.

Tais pressupostos teóricos serviram de base para a elaboração das questões e para a análise das respostas dadas pelos 23 participantes do Estudo Preliminar.

Percurso Metodológico

O recorte aqui apresentado, de uma pesquisa de Doutorado em Educação Matemática, pode ser classificado como um estudo diagnóstico, com análise qualitativa dos dados.

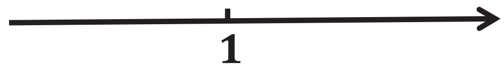
A pesquisa foi realizada em duas fases: a primeira, de caráter diagnóstico, denominada Estudo Preliminar, já está concluída e valeu-se da aplicação de dois conjuntos de questões, respondidos por 23 estudantes brasileiros da terceira série do Ensino Médio (16-18 anos de idade), um deles envolvendo conceitos sobre os números reais e o outro, intervalos reais. A segunda fase, denominada Estudo Principal, em fase de análise dos resultados, foi desenvolvida junto a alunos de primeira série do Ensino Médio, tendo como referência os resultados obtidos no Estudo Preliminar.

Neste trabalho, apresentamos alguns dos resultados obtidos com quatro questões, que fizeram parte do Estudo Preliminar e que foram analisadas com base no quadro teórico adotado. As quatro questões que apresentamos neste trabalho são

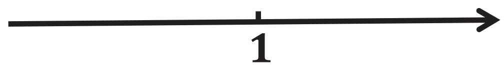
1) Qual é o número inteiro, à direita, mais próximo de: -1 ; 2 ; 1/2 ; 2,6 ; 3,444... ; $\sqrt{2}$; 0,01001... Explique.

2) Qual é o número real, à direita, mais próximo de: -1 ; 2 ; 1/2 ; 2,6 ; 3,444... ; $\sqrt{2}$; 0,01001... Explique.

3) Represente, na reta abaixo, se possível, o número inteiro maior que o número dado e que seja o mais próximo dele. Justifique sua resposta.



4) Represente, na reta abaixo, se possível, o número real maior que o número dado e que seja o mais próximo dele. Justifique sua resposta.



Com essas questões, procuramos responder alguns questionamentos: que justificativa dão ou que estratégia utilizam para indicar um número inteiro mais próximo de um número real? Que justificativa dão ou que estratégia utilizam para indicar um número real mais próximo de outro? A discretização dos números reais é atributo da *imagem de conceito* do grupo pesquisado?

No que segue, expomos nossas análises.

Alguns resultados

Tivemos como objetivo, com as duas primeiras questões, verificar se a discretização de $\mathbb{Z}$ é atributo da *imagem de conceito* em um contexto numérico e se fazem uma generalização dessa discretização para $\mathbb{R}$. Para isso, escolhemos alguns números reais representados de várias formas e que estão presentes nas duas primeiras questões, para fazermos uma comparação entre as respostas.

Primeira questão

A tabela representa a quantidade de acertos para cada número presente na questão.

Tabela 1 Quantidade de respostas corretas para a primeira questão

Números	-1	2	1/2	2,6	3,444...	$\sqrt{2}$	0,01001...
Quantidade	13	17	17	18	15	12	16

Fonte: dos autores

É sempre possível indicar um número inteiro e mais próximo de outro, somando uma unidade aos números inteiros, no caso de -1 e 2 e para os decimais indicar o número inteiro maior e mais próximo. Essa afirmação foi confirmada, visto que apenas um estudante não indicou um número mais próximo e à direita apenas para o radical. Era esperado que o menor número de acertos ou respostas em branco se desse para $\sqrt{2}$; no entanto, não esperávamos que o maior número de acertos se desse para o decimal com expansão decimal finita, 2,6 e sim para o número 2.

Era previsto que algum estudante somasse uma unidade ao numerador e/ou denominador da fração para encontrar o número à direita e mais próximo, fato que não ocorreu em nenhuma das respostas.

Nove estudantes indicaram corretamente todos os números mais próximos e à direita dos números dados, sendo que quatro não deram uma justificativa. Quatro explicaram que números inteiros não possuem casas decimais e um argumentou que os números inteiros não possuem casas decimais diferentes de zero.

A justificativa mais comum para a indicação do número, dada por 7 dos estudantes, foi de que os números inteiros não possuem casas decimais como, por exemplo, a resposta: "*número inteiro é um número não decimal*". Essa ideia pode ser um *já-encontrado* dificultador para a compreensão dos números decimais, visto que pode contribuir para a não percepção de igualdades como 1 = 1,0 = 1,000... ou 2,9 = 2,9000..., por exemplo.

Três pesquisados justificaram que números inteiros não possuem casas decimais diferentes de zero, como exemplo destacamos uma resposta que foi dada após indicar corretamente todos os números: "*Porque estes números são definidos como inteiros sem decimais diferentes de zero. A direita significa o próximo número inteiro maior que o anterior*".

Usando a ideia de arredondamento, dois estudantes expressam mais de um número como mais próximo para alguns da lista. Por exemplo, indicam que o mais próximo de ½ é 0 ou 1. Um deles explica que "*Os números inteiros mais próximo é feito através de um arredondamento, para deixar o número sem nenhuma casa decimal*". Essa ideia não é um *já-encontrado* que facilitou a resolução da questão, visto que esse mesmo estudante indicou 3 como mais próximo e à direita 3,444...

O número zero é historicamente problemático, fato aqui evidenciado por ser o erro mais recorrente. Cinco estudantes desconsideraram o zero como número mais próximo e à direita de -1, indicando como tal o número 1, sendo que dois deles claramente excluem o zero do conjunto dos números inteiros em suas justificativas.

Segunda questão.

Sabemos da impossibilidade de se indicar um número real mais próximo de outro devido à densidade de $\mathbb{R}$**;** no entanto, a totalidade de pesquisados indicou um número mais próximo dos números da lista, sendo diversas as estratégias e justificativas. Não obtivemos respostas de três alunos para $\sqrt{2}$ e de outro, para o radical e -1, número de respostas em branco bem superior em relação à primeira questão.

Somar uma unidade em algum lugar para indicar um número real como mais próximo dos números listados foi a estratégia mais utilizada, realizada por 14 dos pesquisados. Nesse caso, os estudantes parecem estender a propriedade de somar uma unidade para encontrar o sucessor, válida para os inteiros, aos reais. Consideramos essa estratégia um *já-encontrado* dificultador para a compreensão da densidade dos reais. As justificativas desses 14 pesquisados foram separadas por grupos de respostas nos quais colocamos, entre parênteses, a quantidade de pesquisados em cada grupo e uma resposta dada por um dos alunos como ilustração.

Grupo A (4): sem justificativa.

Grupo B (4): números reais podem ser decimais. “*Número real não é necessariamente inteiro, números decimais são reais.”*

Grupo C (4): números reais abrangem outros conjuntos numéricos. “*os números reais comportam todos os demais tipos de número*”.

Grupo D (2): soma envolvendo um pequeno número. “*basta se determinar qualquer outro número que ao se somar ao apresentado for muito próximo deste*”.

Um estudante utilizou, respectivamente, as frações -1/2; 5/2; 1; 3; 7/2; 3/2; 2/100 trazendo, na justificativa, sua *definição de conceito* para números reais: “*os números reais são tanto números inteiros, como também em formas de fração desde que sejam números exatos*”. A ideia de número real ser “exato” se constitui em um *já-encontrado* dificultador para a compreensão da densidade, pois os números reais podem ter expansão decimal infinita, uma característica que imputa a impossibilidade de se encontrar um real mais próximo de outro.

Quatro pesquisados indicaram, para essa questão, com poucas alterações, os mesmos inteiros da questão anterior. Entendemos que esse grupo considera os números reais como inteiros, como o estudante que traz na justificativa sua *definição de conceito* de número real: “*Número real é um número inteiro e positivo*”. A percepção dos reais apenas como inteiros também constitui um *já-encontrado* dificultador para a compreensão do conceito de densidade dos números reais, visto que para esses estudantes os números decimais parecem não fazer parte do conjunto $\mathbb{R}$.

Os quatro estudantes restantes deram respostas inconsistentes, como indicar apenas um número como mais próximo de todos da lista.

Terceira questão

Apenas dois estudantes não indicaram o número 2 como resposta, com justificativas que nos levam a inferir que não entenderam a pergunta. Dos demais, oito disseram simplesmente que seria o inteiro mais próximo; outros quatro que número inteiro não possui casa decimal; três que números inteiros não possuem casas decimais diferentes de zero; dois justificaram que número inteiro não tem vírgula, um que os números naturais estão contidos nos inteiros, um apenas indicou x > 1 x = 2 e dois não justificaram.

Quarta questão

Para essa questão, temos como resultado: quatorze participantes somaram um em algum lugar, praticamente os mesmos alunos da segunda questão (apenas três alterações), sendo a resposta mais frequente 1,1 (seis pesquisados a indicaram); quatro estudantes indicaram 2 como resposta (os mesmos quatro que indicaram números inteiros para o real mais próximo na segunda questão) e cinco deram respostas inconsistentes.

No contexto numérico, a totalidade de pesquisados indicou números, sendo que nenhuma resposta traz algum indicativo da compreensão da densidade dos números reais. No contexto geométrico, dois estudantes parecem verificar a impossibilidade de se indicar um número, porém trazem, como justificativa, a ideia de existência desse número:

"*Não posso representar um numero real maior que 1 e mais proximo dele, pois o numero que entra nessa colocação e um numero infinito. Ex* $1{,}000000000\underbrace{\ldots}_{infinito}1$ "*Não é possivel representar o numero real mais próximo a 1 deve a este ser muito pequeno*".

Em nossa opinião, apenas um estudante pinça de sua *imagem de conceito* ideias consistentes sobre a densidade dos reais no contexto geométrico: "*Impossível, por número real maior que o número 1 (um) eu entendo todo aquele que possui casas decimais após a vírgula. Sendo assim, para qualquer nº que eu escrever que seja mais próximo de zero e maior que 1 (um), sempre haverá um número mais próximo de 1 (um). Possibilidades infinitas.*" Fomos verificar sua resposta no contexto numérico. Esse estudante indicou os próprios números do rol como os mais próximos como, por exemplo, de -1 o mais próximo é 0,01001..., de 2 o 2,6; de ½ o 0,01001...; e assim por diante. Interpretamos que o estudante não compreendeu a questão. Aliás, a questão poderia ter sido melhor elaborada se tivéssemos colocado a frase "Indique um número real, caso exista, à direita e mais próximo de:" em vez de "Qual é o número real, à direita, mais próximo de:" , como deixamos claro no enunciado do contexto geométrico.

Considerações finais

O Estudo Preliminar mostrou que, para a totalidade dos estudantes pesquisados, a densidade dos números reais parece não ser um elemento presente na *imagem de conceito*, quando se trata do contexto numérico (questões 1 e 2). Todos os participantes apontaram a existência de um número real maior e o mais próximo dos números reais apresentados, geralmente somando uma unidade em algum lugar, como por exemplo, $2,\overline{0}1$ como o mais próximo de 2 e $0{,}01002$ como o mais próximo do número $0{,}01001\ldots$. No contexto geométrico (questões 3 e 4), apenas um estudante explicitou a impossibilidade de se indicar um número real à direita de 1 (um) na reta, trazendo na justificativa elementos que apontam para a densidade dos reais. Como estratégia utilizada no contexto numérico, a maioria dos estudantes soma um em algum lugar para encontrar o real mais próximo no contexto geométrico, sendo a resposta de maior freqüência 1,1. Outro equívoco que destacamos é que alguns estudantes trazem números inteiros como sendo reais, tanto no contexto numérico, quanto no contexto geométrico. Essas observações mostram que a discretização dos números reais é atributo da *imagem de conceito* para o grupo pesquisado e nos fazem concluir que a ideia de sucessor, válida para os inteiros, é um *já-encontrado* dificultador para a compreensão do conceito de densidade. Assim, essas conclusões apontam para a necessidade de um estudo sobre o assunto e da indicação de caminhos que talvez possam contribuir para a aprendizagem do conceito de densidade, que é justamente uma de nossas pretensões com nosso Estudo Principal, que se encontra em fase de análise.

Referências bibliográficas

Caraça, B. J. (1951). *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Lisboa: Tipografia Matemática.

Fischbein, E.; Jehiam, R. e Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in hig-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(1), 29-44.

Lima, R. N. (2007). *Equações algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes Mundos da Matemática*. Tese de doutorado não publicada. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Robinet, J. (1986). Lés reels. Quels modeles em on lês eleves? *Educational Studies in Mathematics*, *17*(4), 359-386.

Silva, B. A. e Penteado, C. B. (2009). Fundamentos dos números reais: concepções de professores e viabilidade de início do estudo da densidade no ensino médio. *Educação Matemática e Pesquisa*, *11*(2), 351-371.

Soares, E. F.; Ferreira, M. C. C. e Moreira, P. C. (1999). Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. *Zetetiké*, *7*(12), 95-117.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: exploring the Three Worlds of Mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Tall, D. e Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151-169.